PART4　三角関数の最大・最小

例題

次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1)　$y=\sin\theta \quad \left(\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{4}\pi\right)$

(2)　$y=2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$

(3)　$y=\cos 2\theta-2\cos\theta+1 \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

Point Pickup

練習

次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta$　$\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2)　$y=2\cos 2\theta-4\sin\theta-1$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

第10講　PART4 確認問題

次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

1 $y=3\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$\theta=$ ア のとき　最大値 イ

$\theta=$ ウ のとき　最小値 エ

① 0　② $\sqrt{3}$　③ $-\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{3}$　⑤ $-2\sqrt{3}$　⑥ $\dfrac{\pi}{6}$

⑦ $\dfrac{\pi}{3}$　⑧ $\dfrac{\pi}{2}$　⑨ π

2 $y=\cos 2\theta+2\sin\theta\quad(0\leqq\theta<2\pi)$

$\theta=$ オ , カ のとき　最大値 キ

$\theta=$ ク のとき　最小値 ケ

ただし，オ ＜ カ とする。

[オ , カ , ク の選択肢]

① 0　② $\dfrac{\pi}{6}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{\pi}{2}$

⑤ $\dfrac{2}{3}\pi$　⑥ $\dfrac{5}{6}\pi$　⑦ π　⑧ $\dfrac{3}{2}\pi$

[キ , ケ の選択肢]

① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{3}{2}$

④ $-\dfrac{1}{2}$　⑤ $-\dfrac{3}{2}$　⑥ -3

PART4　三角関数の最大・最小

例題

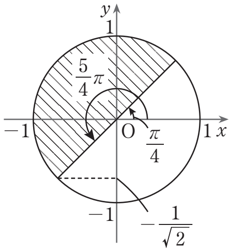
次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1)　$y=\sin\theta\quad\left(\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{4}\pi\right)$　　(2)　$y=2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$

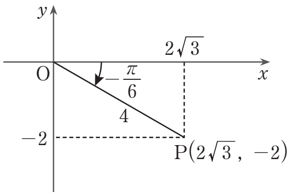
(3)　$y=\cos2\theta-2\cos\theta+1\quad(0\leqq\theta<2\pi)$

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 1

$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



(2)　$y=2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta=4\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$



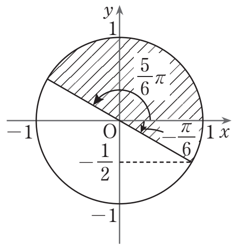
$0\leqq\theta\leqq\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

よって　$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq1$ より $-2\leqq4\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq4$

したがって

$\theta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$　　つまり　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき最大値 4

$\theta-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}$　　つまり　$\theta=0$ のとき最小値 -2

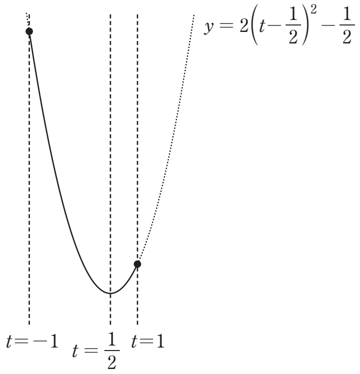


(3)　$y=\cos2\theta-2\cos\theta+1=2\cos^2\theta-1-2\cos\theta+1$

$=2\cos^2\theta-2\cos\theta$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ より $-1\leqq t\leqq1$

$$y=2t^2-2t=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$



よって $t=-1$ で最大値 4，$t=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $-\dfrac{1}{2}$ をとる。

$t=-1$ のとき，$\cos\theta=-1$　　$0\leqq\theta<2\pi$ より $\theta=\pi$

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　　$0\leqq\theta<2\pi$ より $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

したがって　$\theta=\pi$ のとき最大値 4，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{2}$

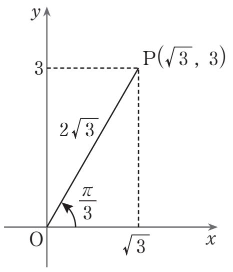
練習

次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta\quad\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2)　$y=2\cos2\theta-4\sin\theta-1\quad(0\leqq\theta<2\pi)$

(1)　$y=\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta=2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$



$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

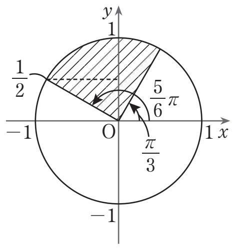
よって　$\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq1$ より

$$\sqrt{3}\leqq2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq2\sqrt{3}$$

したがって

$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$　つまり $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $2\sqrt{3}$

$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{6}\pi$　つまり $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{3}$

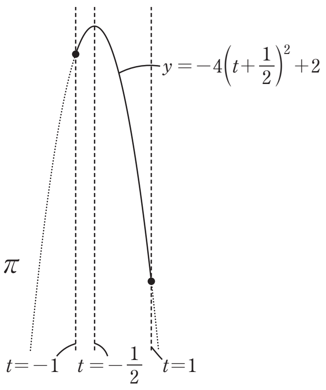


(2)　$y=2\cos2\theta-4\sin\theta-1=2(1-2\sin^2\theta)-4\sin\theta-1$

$=-4\sin^2\theta-4\sin\theta+1$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ より $-1\leqq t\leqq1$

$$y=-4t^2-4t+1=-4\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+2$$



よって　$t=-\dfrac{1}{2}$ で最大値 2，$t=1$ で最小値 -7 をとる。

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$　$0\leqq\theta<2\pi$ より $\theta=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$

$t=1$ のとき，$\sin\theta=1$　$0\leqq\theta<2\pi$ より $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

したがって　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$ のとき最大値 2，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 -7

第10講　PART4 確認問題 解答

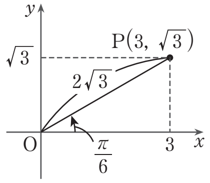
1

[正解] ア：⑦，イ：④，ウ：⑨，エ：③

[解説]

$$y = 3\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$$
$$= 2\sqrt{3}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

[A] [B]

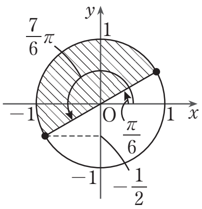


$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$\frac{\pi}{6} \leqq \theta + \frac{\pi}{6} \leqq \frac{7}{6}\pi$$

よって

$$-\frac{1}{2} \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leqq 1 \text{ より}$$



$$-\sqrt{3} \leqq 2\sqrt{3}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leqq 2\sqrt{3}$$

したがって

$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$　つまり　$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$ のとき

最大値 $2\sqrt{3}$

$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$　つまり　$\boldsymbol{\theta = \pi}$ のとき

最小値 $-\sqrt{3}$

[A]　三角関数の合成

$a\sin\theta + b\cos\theta$
$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし

$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

[B]　$a\sin\theta + b\cos\theta$ の形の式は，合成する。θ の変域に注意する。

2 [正解] オ：②，カ：⑥，キ：③，ク：⑧，ケ：⑥

[解説]

$y=\cos 2\theta+2\sin\theta$ [C]

$=1-2\sin^2\theta+2\sin\theta$

$=-2\sin^2\theta+2\sin\theta+1$

[C]　同じ角，同じ種類の三角関数に統一する。

$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ より

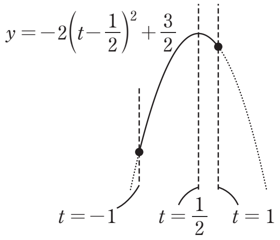
$-1\leqq t\leqq 1$ [D]

[D]　おき換えた文字の変域に注意する。

また

$y=-2t^2+2t+1$

$=-2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$



よって

$t=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{3}{2}$

$t=-1$ で最小値 -3

をとる。

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　　$0\leqq\theta<2\pi$ より

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$

$t=-1$ のとき，$\sin\theta=-1$　　$0\leqq\theta<2\pi$ より

$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

したがって

$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6}}$，$\boldsymbol{\dfrac{5}{6}\pi}$ **のとき　最大値** $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

$\boldsymbol{\theta=\dfrac{3}{2}\pi}$ **のとき　最小値** $\boldsymbol{-3}$